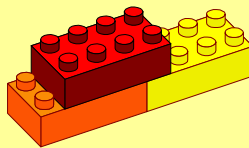


HY-280

«ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ»

θεμελιακές έννοιες της επιστήμης του υπολογισμού



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γεώργιος Φρ. Γεωργακόπουλος

Μέρος Β'

Βασικά στοιχεία περί
ασυμφραστικών γραμματικών και στοιβακτικών αυτομάτων.

B' ΜΕΡΟΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ & ΣΤΟΙΒΑΚΤΙΚΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Τα ερωτήματα είναι απλά και με λυμένα παραδείγματα. Προσπαθείστε να δώσετε τα περισσότερα που μπορείτε. Βαθμολογικά θα μετρήσουν τα εξής:

- το πόση «ύλη» καλύψατε, (με στόχο πάνω από το 70%, και ένα τουλάχιστον υπο-ερώτημα από κάθε ερώτημα),
- η ποιότητα των απαντήσεων (ζητείται σαφήνεια, ακρίβεια, εξηγήσεις, και «σωστή γλώσσα»/ορολογία).

ΔΙΟΡΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ:

Μαζί με την γραπτή εξέταση της Α' εξεταστικής π.
(αναμένεται μετά την 15^η/1^{ου}).

(#1) ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ:

Το εάν μια γραμματική είναι ασυμφραστική ή όχι, φαίνεται στην μορφή της, στον τρόπο με τον οποίο είναι γραμμένη: πρέπει (i) τα παραγωγικά σύμβολα («κεφαλαία») να μετατρέπονται μόνον σε λέξεις λέξεις από τερματικά ή/και παραγωγικά σύμβολα, (κανένα, ένα ή περισσότερα).

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ποιές από τις εξής γραμματικές είναι ασυμφραστικές;

$\begin{aligned} I &\rightarrow \alpha \beta K \gamma \mid \emptyset \\ K &\rightarrow \Lambda M \mid M \Lambda \\ \Lambda &\rightarrow \beta I \beta K \mid \emptyset \\ M &\rightarrow \gamma M M \mid \Lambda \end{aligned}$	$\begin{aligned} I &\rightarrow \gamma \gamma \gamma \Lambda \\ K &\rightarrow \Lambda \mid K \mid \emptyset \\ \Lambda &\rightarrow K \beta \beta \beta \mid \alpha \beta \\ M &\rightarrow M \alpha \alpha \mid \Lambda \end{aligned}$	$\begin{aligned} I &\rightarrow K \\ K \alpha &\rightarrow \Lambda \mid M \\ M &\rightarrow \gamma M \mid \Lambda \end{aligned}$
(α)	(β)	(γ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

(α) Είναι – τηρεί την μορφή που περιγράφεται στο αρχικό σχόλιο.

(β) Είναι – αριστερά έχουμε ένα μόνον παραγωγικό σύμβολο («κεφαλαίο»).

(γ) Δεν είναι: ο κανόνας $K \alpha \rightarrow \dots$ έχει δύο σύμβολα αριστερά του « $\rightarrow$ ».

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#1)

(1.1) Ποιές από τις εξής γραμματικές είναι ασυμφραστικές;

$\begin{aligned} I &\rightarrow A + B \mid \emptyset \\ A &\rightarrow AB \mid B \\ B &\rightarrow x \mid y \mid z \end{aligned}$	$\begin{aligned} I &\rightarrow K \mid \alpha \beta \gamma \Lambda \\ K \gamma &\rightarrow \gamma K \\ \Lambda &\rightarrow I \mid \Lambda \beta \end{aligned}$	$\begin{aligned} I &\rightarrow X \mid Y \mid Z \\ X Y &\rightarrow Z \\ Z &\rightarrow I X \end{aligned}$
(α)	(β)	(γ)

(1.2) Περιγράψτε (σε απλά και σαφή Ελληνικά) το ποιές γλώσσες επί του $\Sigma = \{ \alpha, \beta \}$ αποδέχονται οι παρακάτω γραμματικές, με αρχικό σύμβολο το I:

$$(1.2.1) \quad \Sigma = \{ (,), [,], \quad I \rightarrow (I)I \mid [I]I \mid \emptyset$$

$$(1.2.2) \quad \Sigma = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$$

$$I \rightarrow I_{\alpha\delta}$$

$$I_{\alpha\delta} \rightarrow \alpha I_{\alpha\delta} \delta \mid I_{\beta\delta} \mid I_{\alpha\gamma}$$

$$I_{\beta\delta} \rightarrow \beta I_{\beta\delta} \delta \mid I_{\beta\gamma}$$

$$I_{\alpha\gamma} \rightarrow \alpha I_{\alpha\gamma} \gamma \mid I_{\beta\gamma}$$

$$I_{\beta\gamma} \rightarrow \beta I_{\beta\gamma} \gamma \mid \emptyset$$

(#2) ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΑ:

Το εάν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική ή όχι, εξαρτάται από το εάν μπορούμε να βρούμε μια ασυμφραστική γραμματική γι' αυτήν ή όχι. Στις απλές περιπτώσεις αυτό το κάνουμε «κατ' ευθείαν». Στις πιο σύνθετες χρησιμοποιούμε τους κανόνες κλειστότητας. Προσοχή όμως: οι ασυμφραστικές γλώσσες δεν είναι κλειστές ως προς την τομή, συμπλήρωμα ή διαφορά. Είναι κλειστές ως προς ένωση, παράθεση, επανάληψη, και κατοπτρισμό. Είναι επίσης κλειστές ως προς την τομή **αλλά με κάποια ομαλή γλώσσα**.

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι οι εξής γλώσσες είναι ασυμφραστικές;

(α) $\Lambda = \{\text{όλες οι λέξεις που αρχίζουν με μια σειρά από 'α' και τελειώνουν με μια σειρά από 'β' ή 'γ' (ανακατεμένα)}\}$ και $\text{πλήθος}(\alpha) = \text{πλήθος}(\beta) + \text{πλήθος}(\gamma)$

(β) $\Lambda = \{\text{όλες οι λέξεις από ισορροπημένες παρενθέσεις που } \underline{\text{δεν}} \text{ περιέχουν τρεις απλές παρενθέσεις στη σειρά (δηλαδή το '() () ()')}\}$

(γ) $\Lambda = \{\text{όλες οι λέξεις που περιέχουν 3 } \alpha \text{ στη σειρά αλλά δεν περιέχουν 3 } \beta \text{ στη σειρά}\}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

(α) Οι εξής κανόνες αρκούν: $I \rightarrow \alpha I T \mid \emptyset, T \rightarrow \beta \mid \gamma$.

(β) Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα Λ_i των ισορροπημένων παρενθέσεων είναι ασυμφραστική, και γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $\Lambda' = \Sigma^* - [\Sigma^* () () () \Sigma^*]$ είναι ομαλή ως συμπλήρωμα ομαλής. Η τομή $\Lambda = \Lambda_i \cap \Lambda'$ είναι ασυμφραστική ως τομή ασυμφραστικής με ομαλή γλώσσα, και είναι η ζητούμενη.

(γ) Η Λ είναι ομαλή ως διαφορά δύο ομαλών γλωσσών, άρα είναι και ασυμφραστική, αφού

$$\text{ΟΜΑΛΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ} \subseteq \text{ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ}.$$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#2)

Σχεδιάστε ασυμφραστικές γραμματικές ώστε να παράγουν τις εξής γλώσσες:

(2.1) $\{\lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : (\text{πλήθος «}\alpha\text{» στην } \lambda) = 2 \times (\text{πλήθος «}\beta\text{» στην } \lambda)\}$

(2.2) $\{\lambda \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^* : \text{η λέξη } \lambda \text{ έχει την μορφή } x \gamma x^{(R)}, x \in \{\alpha, \beta\}^*\}$

(2.3) $\{\lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : \text{η λέξη } \lambda \text{ έχει την μορφή } \lambda = \lambda^{(R)}\} // \lambda^{(R)} = \text{η } \lambda \text{ γραμμένη ανάποδα (κατοπτρικά)}$

(2.4) Έστω ότι η S είναι ασυμφραστική γλώσσα και η L ομαλή γλώσσα. Εξηγήστε τα εξής (θεωρητικά ή δια παραδείγματος):

(2.4.1) υπάρχει περίπτωση η $S - L$ να μην είναι ασυμφραστική;

(2.4.2) υπάρχει περίπτωση η $L - S$ να μην είναι ασυμφραστική;

(2.5) $\{\lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : \lambda = \alpha^{(u)}\beta^{(v)}, \mu \neq v\}$

(2.6) $\{\lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : \lambda \neq \alpha^{(u)}\beta^{(v)}, \mu \neq v\}$

(#3) ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ:

Το εάν μια λέξη ανήκει σε μια ασυμφραστική γλώσσα πιστοποιείται μόνον εάν δώσουμε την σειρά των κανόνων με τους οποίους παράγεται. Εναλλακτικά έχουμε μια δυνατότητα μιας απεικονιστικής βεβαίωσης δίνοντας ένα κάποιο (ή «το») συντακτικό δένδρο (ΣΔ) που παράγει την λέξη.

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

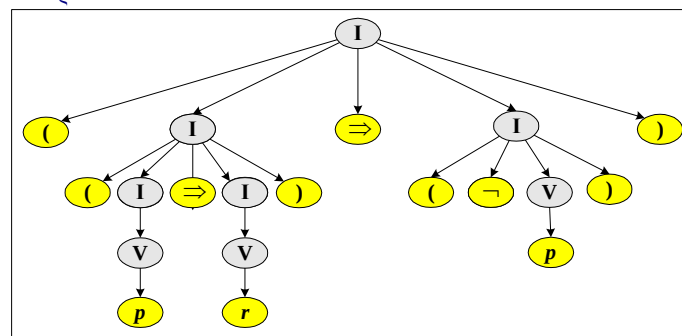
Ποιά συντακτικά δένδρα παράγουν τις αντίστοιχες λέξεις από τις αντίστοιχες γραμματικές:

(α) Γραμματική: $I \rightarrow V \mid (\neg I) \mid (I \Rightarrow I) \quad V \rightarrow p \mid q \mid r$ και $\lambda = ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p))$

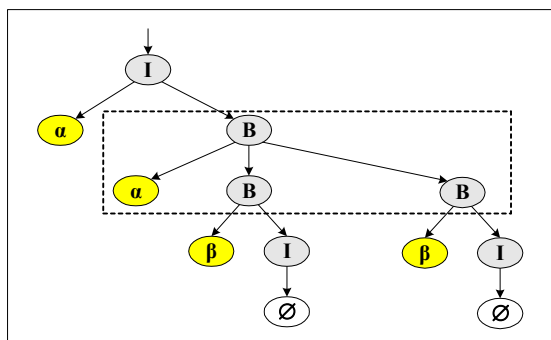
(β) Γραμματική: $I \rightarrow \alpha B \mid \beta A \mid \emptyset \quad A \rightarrow \alpha I \mid \beta A A \quad B \rightarrow \alpha B B \mid \beta I$ και $\lambda = \alpha \alpha \beta \beta$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

(α) Το εξής συντακτικό δένδρο.



(β) Το εξής συντακτικό δένδρο.



Προσέξτε την μορφή ενός ΣΔ:

- **Ρίζα:** η ρίζα περιέχει πάντοτε το αρχικό παραγωγικό σύμβολο (εδώ το I).
- **Κόμβοι:** οι μη-τερματικοί κόμβοι περιέχουν από ακριβώς ένα παραγωγικό σύμβολο (π.χ. το B).
- **Φύλλα:** οι τερματικοί κόμβοι (τα «κίτρινα» φύλλα) περιέχουν τερματικές λέξεις, (από «πεζά» σύμβολα, όπως εδώ 'α' ή 'β', ή και ίσως την κενή λέξη $\emptyset$).
- **Ακμές:** κάθε κόμβος K μαζί με τους θυγατρικούς του $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ από αριστερά προς τα δεξιά αντιστοιχεί σε κανόνα της γραμματικής $K \rightarrow \theta_1 \theta_2, \dots, \theta_n$ (π.χ. $B \rightarrow \alpha B B$): κάθε τερματική λέξη και κάθε παραγωγικό σύμβολο γίνονται «θυγατρικοί» του συμβόλου από όπου προέρχονται (βλ. π.χ. παραπάνω τον κανόνα $B \rightarrow \alpha B B$)

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#3)

- (3.1) Χρησιμοποιείτε την γραμματική των αλγεβρικών εκφράσεων (βλ. σημειώσεις, 15η ενότητα) για να βρείτε το συντακτικό δένδρο της έκφρασης $v_2 * v_1 + v_3$. Αυτή η έκφραση αναγινώσκεται και ως $(v_2 * v_1) + v_3$ και ως $v_2 * (v_1 + v_3)$ – σε ποιά συντακτικό δένδρο αντιστοιχεί κάθε ανάγνωση; Θα μπορούσατε να είχατε παραγάγει και τους δύο τρόπους με την γραμματική που δίδεται; Γιατί;
- (3.2) Δώσατε συντακτικό δένδρο, για την λέξη $(()) () ()$ της γλώσσας των παρενθέσεων, κατά την εξής γραμματική: $I \rightarrow (I) \mid II \mid \emptyset$.
- (3.3) Δώσατε συντακτικό δένδρο, (κατά τις σχετικές γραμματικές, βλ. σημειώσεις, 13η ενότητα), για την λέξη $\alpha\alpha\beta\beta\alpha$ της γλώσσας $L_{\alpha\beta} = \text{«όσα-α-τόσα-β»}$.

(#4) ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΑΣΥΜΦΡΑΣΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗΣ

Όχι όλες, αλλά πολλές χρήσιμες ασυμφραστικές γραμματικές είναι να δυνατόν να λάβουν αιτιοκρατική μορφή: σε μια αιτιοκρατική ασυμφραστική γραμματική υπάρχει το πολύ ένας εφαρμόσιμος κανόνας κάθε στιγμή, ο οποίος μάλιστα εξαρτάται από τον επόμενο προς ανάγνωση γράμμα της υπό ανάλυση λέξης. Τα εξής εμπόδια που πρέπει να απαλειφούν:

- απαλειφή διλημμάτων (φανερά και «κρυφά»).
- απαλειφή αριστερής αναδρομής (βλ. και σημειώσεις).

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δώστε μια αιτιοκρατική εκδοχή για την εξής ασυμφραστική γραμματική:

$$I \rightarrow \alpha\beta\gamma X \mid \alpha\beta\delta Y, X \rightarrow X\delta \mid \epsilon, Y \rightarrow XX \mid I.$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε το δίλημμα $I \rightarrow \alpha\beta\gamma X \mid \alpha\beta\delta Y$. Αυτό απαλείφεται από την αλλαγή $I \rightarrow \alpha\beta I'$, και $I' \rightarrow \gamma X \mid \delta Y$: έτσι το κοινό μέρος 'αβ' των 'αβγ' και 'αβδ' αποσπάται αφήνοντας το 'γ' να επιλέγει τον 1ο κανόνα, και το 'δ' το 2ο κανόνα.

Η αριστερή αναδρομή $X \rightarrow X\delta \mid \epsilon$, απαλείφεται με τους κανόνες $X \rightarrow \epsilon X', X' \rightarrow \delta X' \mid \emptyset$, αφού κατά τους παραπάνω κανόνες το X μετατρέπεται απλά και μόνον σε 'ε δ δ ... δ'.

Τέλος έχουμε το (κρυφό) δίλημμα $Y \rightarrow XX \mid I$ – (και τα δύο αρχίζουν με «κενό»). Για να κάνουμε το επόμενο προς ανάγνωση σύμβολο να καθορίσει την ορθή (ή ακριβέστερα την μόνη) επιλογή, προσέχουμε πως εδώ ό,τι παράγεται από X αρχίζει με 'ε', ενώ ό,τι παράγεται από I αρχίζει με 'αβ', άρα αρκεί να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά τους κανόνες $Y \rightarrow \epsilon X' \mid \alpha\beta I'$. Μια ισοδύναμη αιτιοκρατική μορφή είναι λοιπόν:

$$\begin{array}{ll} I \rightarrow \alpha\beta I' & I' \rightarrow \gamma X \mid \delta Y \\ X \rightarrow \epsilon X' & X' \rightarrow \delta X' \mid \emptyset \\ Y \rightarrow \epsilon X' \mid \alpha\beta I' \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#4)

(4.1) Δώστε μια αιτιοκρατική εκδοχή για την εξής ασυμφραστική γραμματική:

$$I \rightarrow I \sigma \tau \mid \rho \quad X \rightarrow Y Y \mid I \quad Y \rightarrow \sigma \sigma \tau X \mid \sigma \tau \tau I$$

(#5) ΣΤΟΙΒΑΚΤΙΚΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ:

Στα στοιβακτικά αυτόματα έχουμε διαθέσιμες εντολές της μορφής

$$\langle K \mid Q, \lambda \rangle \rightarrow \langle K' \mid Q_1 Q_2 \rangle$$

ή «αν είσαι σε κατάσταση K , η κορυφή της στοίβας περιέχει Q , και «βλέπει» την λέξη λ , τότε μπορείς να διαβάσεις λ , να έλθεις σε κατάσταση K' , και να αποθέσεις στη στοίβα τα Q_1, Q_2 ». Εδώ, μας ενδιαφέρουν σ. αυτόματα, στα οποία μία και μόνον οδηγία «ανάγνωσης» λέξης λ είναι εφαρμόσιμη κάθε φορά (αλλιώς, έχουμε απλώς απόσυρση από τη στοίβα: $\langle K \mid Q, \emptyset \rangle \rightarrow \langle K' \mid \emptyset \rangle$), χωρίς ανάγνωση, και χωρίς απόθεση στη στοίβα νέων συμβόλων).

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Δώστε τις οδηγίες για ένα σ. αυτόματο που διαβάζει την γλώσσα των ισορροπημένων παρενθέσεων,

$$I \rightarrow (I) \mid \emptyset.$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Η extra κατάσταση K δεν βοηθάει εδώ και παραλείπεται. Οι εντολές είναι:

- $\langle I, () \rightarrow \langle I \rangle I \rangle$ αν δεις αριστερή παρένθεση, την διαβάζεις και στοιβάζεις το «υπόλοιπο» I .
- $\langle I, \emptyset \rangle \rightarrow \langle \emptyset \rangle$ αν όχι, τότε αποσύρουμε από τη στοίβα χωρίς ανάγνωση ή απόθεση.
- $\langle (, () \rightarrow \langle \emptyset \rangle$ η αριστερή παρένθεση διαβάζει αριστερή παρένθεση.
- $\langle),) \rangle \rightarrow \langle \emptyset \rangle$ η δεξιά παρένθεση διαβάζει δεξιά παρένθεση.

.

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#5)

(5) Δείξτε ότι οι εξής γλώσσες γίνονται αποδεκτές από «αιτιοκρατικό» στοιβακτικό αυτόματο όπως παραπάνω. Αν θέλετε, υποθέστε για ευκολία, ότι η στοίβα και η ταινία φέρουν στο τέλος τους ένα βοηθητικό σύμβολο #.

$$(5.1) L = \{ \lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : \lambda = \alpha(\mu)\beta(\nu), \mu \neq \nu \} \text{ (χρησιμοποιείστε 3 καταστάσεις } K = \text{CHECK, OK, FAIL.)}$$

$$(5.2) L = \{ \lambda \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^* : \eta \lambda \text{ έχει την μορφή } x \gamma x^{(R)}, x \in \{\alpha, \beta\}^* \} \text{ (δεν απαιτείται extra κατάσταση } K.)$$

(#6) ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ CHOMSKY

Μια ασυμφραστική γραμματική είναι σε μορφή *Chomsky* εάν και μόνον όλοι οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:

- $X \rightarrow YZ$ (ένα παραγωγικό σύμβολο γίνεται ακριβώς δύο παραγωγικά σύμβολα).
- $X \rightarrow \sigma$ (ένα παραγωγικό σύμβολο γίνεται ακριβώς ένα τερματικό σύμβολο).
- $I \rightarrow \emptyset$ (μόνον το αρχικό σύμβολο μπορεί να καταστεί «κενό»).

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δώστε την κανονική μορφή Chomsky για την εξής ασυμφραστική γραμματική:

$$I \rightarrow AB\Gamma \mid \alpha B \mid \emptyset$$

$$A \rightarrow \beta\beta I$$

$$B \rightarrow \gamma I \mid \emptyset$$

$$\Gamma \rightarrow \Gamma\Gamma \mid \beta\alpha$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Για να απαλείψουμε τον κανόνα ' $B \rightarrow \emptyset$ ' τον εφαρμόζουμε προσθέτοντας για κάθε κανόνα της μορφής $K \rightarrow XBY$ (περιέχει δεξιά B), τον ίδιο κανόνα χωρίς το B : $K \rightarrow XY$.

$$I \rightarrow AB\Gamma \mid A\Gamma \mid \alpha B \mid \alpha \mid \emptyset$$

$$A \rightarrow \beta\beta I$$

$$B \rightarrow \gamma I$$

$$\Gamma \rightarrow \Gamma\Gamma \mid \beta\alpha$$

Για να κάνουμε τις απαραίτητες αλλαγές ως προς το πλήθος και είδος των συμβόλων χρησιμοποιούμε βοηθητικά σύμβολα:

$W_{B\Gamma}$	για να παραχθεί το ζεύγος $B\Gamma$
$W_{\beta\alpha}, W_{\beta\beta}$	για να παραχθούν οι λέξεις $\beta\alpha, \beta\beta$
W_σ	για να γραφεί το τερματικό σ , όπου $\sigma = \alpha, \beta, \gamma$.

Οι αντικαταστάσεις στους κανόνες είναι περίπου προφανείς:

$$\begin{aligned} I &\rightarrow A W_{B\Gamma} \mid A\Gamma \mid W_\alpha B \mid \alpha \mid \emptyset \\ A &\rightarrow W_{\beta\beta} I \\ B &\rightarrow W_\gamma I \mid \emptyset \\ \Gamma &\rightarrow \Gamma \Gamma \mid W_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

όπου,

$$W_{B\Gamma} \rightarrow B \Gamma \quad W_{\beta\beta} \rightarrow W_\beta W_\beta \quad W_{\beta\alpha} \rightarrow W_\beta W_\alpha$$

και φυσικά:

$$W_\alpha \rightarrow \alpha \quad W_\beta \rightarrow \beta \quad W_\gamma \rightarrow \gamma$$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#6)

(6) Γράψτε την εξής γραμματική σε μορφή Chomsky, και με βάση αυτή τη μορφή δώστε ένα συντακτικό δένδρο για την λέξη $x + (y + z)$:

$$\Sigma = \{x, y, z, +\}, \quad \Sigma_0 = \{S, V\}, \quad I = S, \quad \Delta = \{S \rightarrow S + S \mid V \mid (S), V \rightarrow x \mid y \mid z\}.$$

(#7) ΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ:

Για να δείξουμε ότι μια γλώσσα είναι ασυμφραστική εξαρτάται από το να βρούμε μια ασυμφραστική γραμματική που να την παράγει. Για να δείξουμε ότι δεν είναι ασυμφραστική πρέπει να δείξουμε ότι καμμία ασυμφραστική γραμματική Γ δεν την παράγει ακριβώς, ότι δηλαδή η Γ είτε (i) προσθέτει λέξεις που δεν έχει η Λ είτε (ii) δεν παράγει λέξεις που έχει η Λ . Το εργαλείο εδώ για το (i) είναι το λήμμα άντλησης: δείχνουμε (αν μπορούμε) ότι, λόγω απείρου πλήθους λέξεων, αν η Λ ήταν ασυμφραστική τότε θα έπρεπε να περιέχει (μεταξύ άλλων) και όλες λέξεις της μορφής $x \mu^{(\kappa)} y \nu^{(\kappa)} z$, για κάποιες λέξεις x, y, z, μ, ν όπου $|\mu\nu| > 0, \kappa = 0, 1, 2, \dots$ και δείχνουμε ότι (όποια ειδική μορφή και εάν είχαν οι λέξεις x, y, z, μ, ν), για κάποιο κ θα συνέβαινε $x \mu^{(\kappa)} y \nu^{(\kappa)} z \notin \Lambda$ – πράγμα που οδηγεί σε άτοπο, και άρα η υπόθεση « Λ = ασυμφραστική» πρέπει να απορριφθεί.

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι η εξής γλώσσα Λ δεν είναι ασυμφραστική: $\Lambda = \{ \alpha^{(n^2)} : n \geq 1 \}$ (δηλαδή: «τόσα 'α' όσο ένα οποιαδήποτε τέλει τετράγωνο»).

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: Έστω ότι η Λ παράγεται από κάποια ασυμφραστική γραμματική Γ . Όσο μεγάλη και εάν είναι η γραμματική Γ , η γλώσσα Λ έχει απείρου πλήθους λέξεις (διότι έχουμε απείρου πλήθους τετράγωνα n^2) και άρα – κατά το λήμμα της άντλησης – κάποια από αυτές θα έχει την μορφή $x \mu^{(i)} y \nu^{(i)} z, |\mu\nu| > 0$, έτσι ώστε όλες οι λέξεις $\lambda = x \mu^{(\kappa)} y \nu^{(\kappa)} z, \kappa \geq 0$, να ανήκουν στην Λ , δηλαδή το μήκος τους να είναι τέλει τετράγωνο ή $\lambda = n^2$ φορές το «α». Αν $p = |x| + |\mu| + |z|$, και $q = |\mu| + |\nu|$, αυτό σημαίνει ότι για όλα τα κ θα πρέπει: $\text{πλήθος}(\lambda) = |x \mu^{(\kappa)} y \nu^{(\kappa)} z| = p + \kappa q = n^2$ (για κάποιο κατάλληλο n εξαρτώμενο από το κ). Αυτό όμως δεν μπορεί εδώ να συμβαίνει συνεχώς, (δηλαδή για όλα τα κ) διότι το αριστερό μέλος αυξάνεται «γραμμικά» ενώ το δεξιό «τετραγωνικά»: **συγκεκριμένα**, για τις διαδοχικές τιμές του $\kappa = q$ και $\kappa = q+1$, θα είχαμε:

$$\begin{aligned} p + (q)q &= n^2, \text{ (δηλαδή } n > q), & \text{αλλά και,} \\ p + (q+1)q &= (n')^2 \geq (n+1)^2, & \text{(που είναι το πλησιέστερο μεγαλύτερο τετράγωνο).} \end{aligned}$$

Αφαιρώντας την ισότητα από την ανισότητα θα λαμβάναμε,

$$q \geq [(n+1)^2 - n^2] \text{ ή } q \geq 2n+1, \quad \text{το οποίο αντιφάσκει με το ότι } n > q.$$

Από το άτοπον συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ασυμφραστική γραμματική Γ που να παράγει την γλώσσα Λ .

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗ (#7)

Χρησιμοποιήστε το λήμμα άντλησης για να δείξετε ότι οι εξής γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές:

(α) $L = \{ \lambda = \alpha^{(p+1)} \}$, όπου p = οποιοσδήποτε πρώτος φυσικός αριθμός } (προσοχή στο «**p+1**»)

(β) $L = \{ \lambda \in \{\alpha, \beta\}^* : \lambda = x x x, \text{ για κάποιο } x \in \{\alpha, \beta\}^* \}$.